Universidade de São Paulo em São Carlos Lista 5, resolver até 2.10.2015

SPI5814 Física atômica e molecular

Nome:

Oscilador harmônico três-dimensional

Mostre para um oscilador harmônico três-dimensional isotrôpico $[\hat{H}, \hat{\mathbf{l}}^2] = [\hat{H}, \hat{l}_z] = 0$. Faz cálculos explícitos, isto é, mostre $\left[\frac{p^2}{2m}, \hat{l}_z\right] = 0 = \left[\frac{m}{2}\omega^2 r^2, \hat{l}_z\right]$ e $\left[\frac{p^2}{2m}, \hat{\mathbf{l}}^2\right] = 0 = \left[\frac{m}{2}\omega^2 r^2, \hat{\mathbf{l}}^2\right]$.

Acoplamento spin-órbita

a. Mostre que o operador $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ associado ao acoplamento spin-órbita, satisfaz a relação $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = L_z S_z + (L_+ S_- + L_- S_+)/2$.
Obtenha a representação matricial do operador $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, considerando as bases:
b. $\{|m_{j1}\rangle \otimes |m_{j2}\rangle\}$ dos autoestados comuns aos operadores $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$, J_{1z}, J_{2z};
c. $\{|J, M\rangle\}$, associada aos operadores $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$, $\mathbf{J}^2$, J_z.

Ginástica de operadores do momento angular

Considere o problema da adição do momento angular orbital ℓ e de um spin 1/2. Obtenha os $2l+1$ estados $|\ell+1/2, m_j\rangle$, além dos $2l$ estados $|\ell-1/2, m_j\rangle$ (que constituem uma base comum aos operadores ℓ_1^2, $\mathbf{s}_2^2$, $\mathbf{j}^2$, j_z), expandidos na base $|m, \epsilon\rangle$ dos autoestados dos operadores $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{s}^2$, ℓ_z, s_z.

Ginástica de operadores do momento angular

Determine para os estados $S_{1/2}$ e $P_{3/2}$ de um átomo com o spin núclear $I = 3/2$ com acoplamento hiperfino $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{I}}$ como os autoestados da base acoplada se expandem na base desacoplada. Não consideramos campo magnético externo.

Ginástica de operadores de momento angular

Calcule os elementos da matriz de $\hat{j}_x$ e $\hat{j}_x^2$.

Expansão do momento angular acoplado numa base desacoplada

a. Consideramos o átomo de ^{87}Rb que tem o momento angular nuclear $I = 3/2$. Quais são os estados hiperfinos F possíveis resultando de um acoplamento de I com o momento angular eletrônico total do estado fundamental $^2S_{1/2}$? Quais são os sub-estados Zeeman possíveis dos F?
b. Quais são os estados hiperfinos F' possíveis resultando de um acoplamento de I com o momento angular eletrônico total do estado excitado $^2P_{3/2}$, $F' = 2$? Quais são os sub-estados Zeeman possíveis dos F'?
c. Uma transição entre um estado hiperfino fundamental e um estado hiperfino excitado pode ser descrita por um acoplamento do momento angular total F com o momento angular do fóton κ formando o momento angular do estado excitado F'. Para ver isso, consideramos agora os níveis $F = 1$ e $F' = 2$. Expande o momento angular acoplado $|(F,\kappa)F', m_{F'}\rangle = |(1,1)2, m_{F'}\rangle$ numa base desacoplada para cada valor de $m_{F'}$ possível.
Note bem: Os Clebsch-Gordans comparam só as forças das transições entre vários sub-estados Zeeman do mesmo par (F, F'). Para comparar as forças entre diferentes pares (F, F') é preciso calcular os coeficientes $6j$.

Ginástica de operadores de momento angular

Mostra que se $\hat{j}_z$ é preciso, $\hat{j}_x$ e $\hat{j}_y$ são imprecisos.
Com a normalização $\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$ temos$\langle j,m|\hat{j}_\mp\hat{j}_\pm|j,m\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m(m\pm 1)]$, $e\hat{j}_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}|j,m\pm1\rangle$.

Ginástica de operadores de momento angular

Considere o problema da adição dos momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$:
a. Quais os possíveis valores de m e j, em que $\hat{j}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$ e $j_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$?
b. Quais as degenerescências $g_{j_1,j_2}(m)$?
c. Encontre os estados da base $\{|j,m\rangle\}$, comum aos operadores $\mathbf{j}_1^2$, $\mathbf{j}_2^2$, $\mathbf{j}$, j_z, expandidos na base $\{|j_1,m_1\rangle \otimes |j_2,m_2\rangle\}$ dos autoestados de $\mathbf{j}_1^2$, $\mathbf{j}_2^2$, j_{1z}, j_{2z}.

Ginástica de operadores de momento angular

Dado os momentos j_1 e j_2, e sendo C_{m_1,m_2} os coeficientes de Clebsch-Gordan, prove que $\sum_{m_1,m_2} |C_{m_1,m_2}|^2 = 1$.